

Μιγαδικές Συναρτήσεις 1 - Ιούνιος 2024

Διάρκεια 3 Ώρες

Θέμα 1 [1 μον.]

Έστω η συνάρτηση $f(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}$. Εξετάστε για ποια σημεία $z_0 \in \mathbb{C}$ η f είναι συνεχής και σε ποια είναι μιγαδικά διαφορίσιμη.

Θέμα 2 [1 μον.]

Έστω $a \in \mathbb{C}^*$. Βρείτε για ποια $z \in \mathbb{C}$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$ συγκλίνει. Να δώσετε το όριό της στα σημεία αυτά και εξετάστε αν συγκλίνει απόλυτα εκεί.

Θέμα 3 [2 μον.]

Έστω η συνάρτηση $f(z) = \tan z$. Δώστε ρητά το μέγιστο πεδίο ορισμού της f στο \mathbb{C} . Αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά η f γύρω από το 0; Γιατί ναι ή γιατί όχι; Αν ναι, τότε ποιά η ακτίνα σύγκλισης της εν λόγω δυναμοσειράς;

Θέμα 4 [0,5+0,5 μον.]

Έστω K το απλά θετικά προσανατολισμένο ημικύκλιο με αρχή το σημείο $-i$ πέρας το i το οποίο διέρχεται από το σημείο 1.

(i) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_K \frac{dz}{z}$.

(ii) Ελέγξτε αν η τιμή του I επαληθεύει την εκτίμηση

$$\left| \int_K \frac{dz}{z} \right| \leq L(K) \cdot \max_{z \in K} |f(z)|$$

για συνεχείς συναρτήσεις $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ και C^1 -καμπύλες με συμπαγή εικόνα $K \subset \mathbb{C}$ και μήκος $L(K)$.

Θέμα 5 [1,5 μον.]

Ας είναι $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ακέραια και $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Έστω επίσης, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ σταθερό σημείο και έστω $I(r) := \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \phi, y_0 + r \sin \phi) d\phi$, $r > 0$. Να αποδείξετε ότι $I'(r) = 0, \forall r > 0$.

Θέμα 6 [1,5 μον.]

Βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I := \int_{\partial D(i, 2)} \left(\frac{z}{z-1-i} \right)^3 dz$, όπου $\partial D(i, 2)$ απλός κλειστός και θετικά προσανατολισμένος κύκλος.

Θέμα 7 [1 μον.]

Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x + ix^2) = x^2 - x^4 + 2ix^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{1}{n}\right) \forall n \in \mathbb{N}$.

Θέμα 7 [1 μον.]

Εξετάστε αν η $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$ έχει μεμωνομένες ανωμαλίες και χαρακτηρίστε τις.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!